

# מכינה מתמטיקה לקרהת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 26 - פונקציות - תכונות מתקדמות

### תוכן העניינים

1	. תחומי הגדרה של פונקציה.
3	. הרכבת פונקציות.
6	. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית.
11	. פונקציה מחזורית.

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

### תשובות סופיות

.  $x$  כל **(1)**

$x \neq \pm 2$  **(2)**

.  $x$  כל **(3)**

$x \neq 0, 1, -1$  **(4)**

$x \neq 2, -1$  **(5)**

$x \geq 4$  **(6)**

$x \leq -2, x \geq 1$  **(7)**

.  $x$  כל **(8)**

$-1 < x < 1$  **(9)**

$x < -2, x > 1$  **(10)**

$x > 0, x \neq 1$  **(11)**

.  $x$  כל **(12)**

$x > 0, x \neq 1$  **(13)**

$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$  **(14)**

$x \neq \frac{\pi k}{4}$  **(15)**

.  $x$  כל **(16)**

$3 < x < 5$  **(17)**

$-2 < x < 0$  **(18)**

## הרכבת פונקציות

### שאלות

**1)** נתונות הפונקציות הבאות :  
 $. h(x) = \frac{4}{x}$  ,  $g(x) = x^2$  ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות :

$f(g(x))$  א.       $h(g(f(5)))$  ב.       $f(g(1))$  ג.

$h(h(x))$  ד.       $f(f(x))$  ה.       $h(f(x))$  ט.

**2)** נתון :  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו  $f(f(x))$  עבור  $x=3$

**3)** נתון :  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$      $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x=8$

**4)** נתון :  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$

**5)** נתון :  $f(x) = e^{2x}$      $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x=2$

**6)** נתון :  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$  ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חסבו  $f(g(x)), g(f(x))$

**7)** נתונות הפונקציות :

$. f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$  ,  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור הרכיבה  $z(x) = g(f(x))$

## (8) נתונות הפונקציות:

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$$

$$\cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור הרכבה  $(f \circ g)(x)$ .

ב. נתון ש-  $n \in \mathbb{Z}$  ו-  $n \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בודדות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאן את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x)))))}_{n \text{ times}}$

## תשובות סופיות

$$x. 1 \quad x-8 . 2 \quad \frac{4}{x-4} \cdot 3 \quad x^2-4 . 4 \quad 4 . 5 \quad -3 . 6 \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 \\ 69 \\ 13 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$-10 \quad \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

$$n \leq -3 . 2 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 . 8 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 8 \\ 9 \end{matrix}$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad \begin{matrix} 9 \end{matrix}$$

## פונקציה זוגית ואי-זוגית

### שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות או זה זוגיות:

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = x^4 + x^{10} \quad (2)$$

$$y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = 2^x \quad (6)$$

$$y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8)$$

$$y = \ln x + x^2 \quad (7)$$

9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x), z(x) = f(x^2)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $z, k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ופונקציה זוגית  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3)$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

11) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ונתונה פונקציה זוגית  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4), k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $z, k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

12) נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$  ומקיים  $|f(x)| < 1$ .

נתון כי  $g(x)$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

הוכיחו שהפונקציה  $z(x) = g(x) \ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$

**13)** הוכיחו כי :

- סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**14)** הוכיחו כי :

- סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל  $x$  היא פונקציית האפס.

**15)** הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.

$$\text{נגיד } z = (f(x))^n \text{ כאשר } 1 > n \text{ טבעי.}$$

קבעו האם הפונקציה  $z$  היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

**16)** נתונה הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל  $x$ .

$$f_{odd}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{even}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

נגיד :

- הוכיחו כי  $f_{odd}$  היא פונקציה אי-זוגית ו-  $f_{even}$  היא פונקציה זוגית.
- הוכיחו כי  $f(x) = f_{odd}(x) + f_{even}(x)$  והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ציינו את הפונקציה  $f(x) = x^2 + x + 1$  כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

**17)** הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- אם  $f$  פונקציה אי-זוגית אז  $f(0) = 0$ .
- אם  $f$  פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב-  $x = 0$  אז  $f(0) = 0$ .

**18)** הוכיחו את הטענות הבאות :

- הfonקציה  $f(x) = \cos x$  היא זוגית.
- הfonקציה  $f(x) = \sin x$  היא אי-זוגית.
- הfonקציה  $f(x) = \tan x$  היא אי-זוגית.
- הfonקציה  $f(x) = \cot x$  היא אי-זוגית.

**19)** נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(a > 0) \quad (-a, a)$$

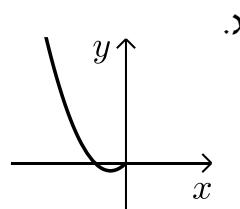
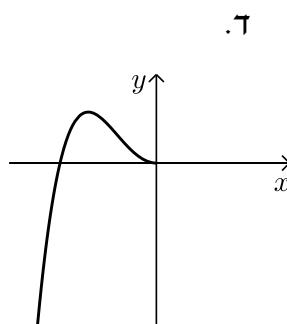
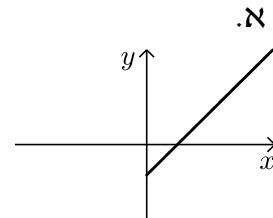
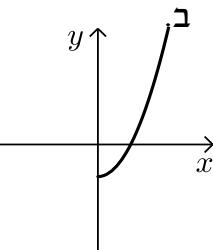
הוכיחו כי גם  $f^{-1}$  פונקציה אי-זוגית.

**20)** הוכיחו שהfonקציות הבאות הן אי-זוגיות :

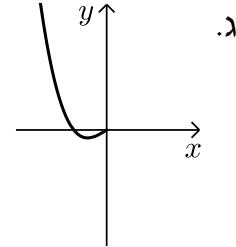
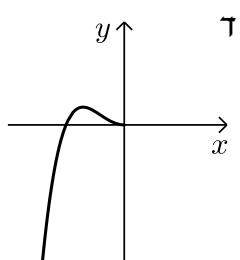
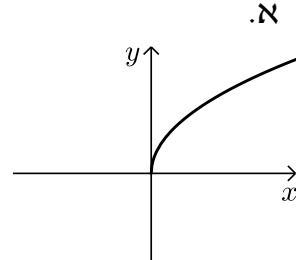
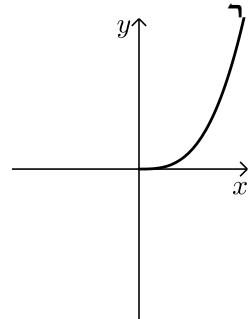
$$\text{א. } y = \arctan x$$

$$\text{ב. } y = \arcsin x$$

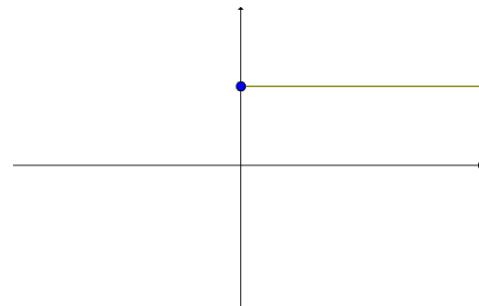
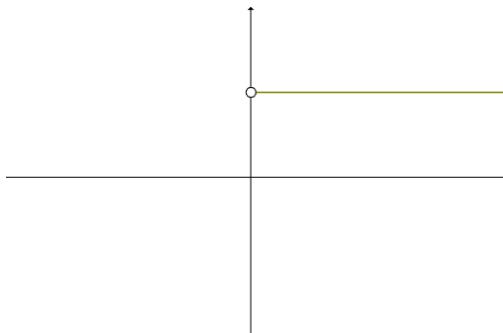
**21)** הפונקציות המסורטוטות להלן מוגדרות לכל  $x$ .  
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



22) הפונקציות המשורטוטות להלן מוגדרות לכל  $x$ .  
 השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:



23) השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



**תשובות סופיות**

שאלות 1-8 : זוגיות : 1,4 ; 2,3,5,8 ; 6,7 . כללית :

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) טענה ב' .

11) k אי-זוגית, z זוגית.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) כאשר n זוגי – זוגית, ובאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

$$f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$$

16) א.+ב. שאלת הוכחה.

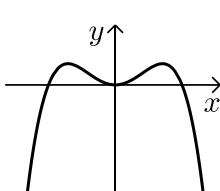
17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

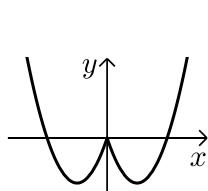
19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

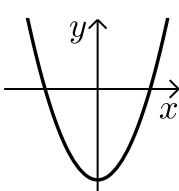
21) להלן הגרפים :



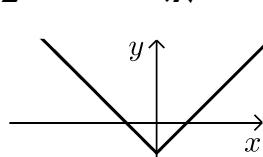
.7



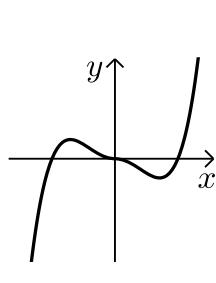
.8



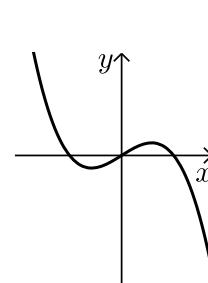
.9.



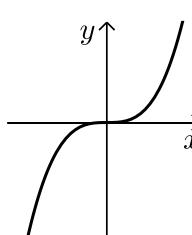
.10.



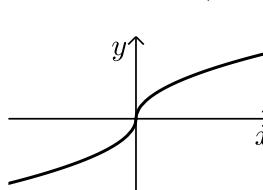
.11



.12



.13



.14.

22) להלן הגרפים :

23) ראו בסרטון.

## פונקציה מחזורית

### שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2)$$

$$y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4)$$

$$y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6)$$

$$y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8)$$

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10)$$

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12)$$

$$y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16)$$

$$y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18)$$

$$y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20)$$

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23)$$

$$y = x + \cos x \quad (22)$$

$$y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26)$$

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (25)$$

$$y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירה פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם  $f(x)$  מחזורית בעלת מחזור  $p$ ,

אז  $\frac{p}{c}$  מחזורית בעלת מחזור  $y = a + b \cdot f(cx + d)$

(28) הוכיחו : אם  $T$  הוא מחזור של  $f(x)$ , אז לכל  $n$ שלם .  $f(x+nT) = f(x)$

29) נתון כי  $f, g$  מוגדרות לכל  $x$  ובעלן מחזורי  $p_1, p_2$ , בהתאם.

נתון כי היחס  $\frac{p_1}{p_2}$  הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות  $(g \neq 0)$   $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$  הן מחזוריות.

30) נתונה הפונקציה  $f(x) = x - [x]$ .

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזורי הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

31) נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0,1]$ .

ציררו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית  $(x)g$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  בקטע  $[0,1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $f \circ g$ .

32) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0,1]$ .

ציררו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית  $(x)g$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  ב- $[0,1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $g$ .

**תשובות סופיות**

$\frac{\pi}{4}$  (5)

$\pi$  (4)

$\frac{\pi}{4}$  (3)

$\frac{\pi}{10}$  (2)

$4\pi$  (1)

$\pi$  (10)

$\frac{\pi}{2}$  (9)

$\pi$  (8)

$\pi$  (7)

$\frac{\pi}{2}$  (6)

$2\pi$  (15)

$2\pi$  (14)

$2\pi$  (13)

$\pi$  (12)

$40\pi$  (11)

$\pi$  (18)

$\pi$  (17)

$\pi$  (16)

19) הפונקציה היא למשהה  $y = 1$ , כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.  
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

$\frac{\pi}{2}$  (20)

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

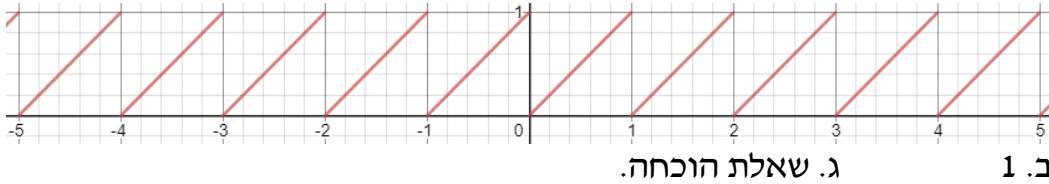
26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

30) א.



ג. שאלת הוכחה.

ב. 1

$$g(x) = x - k, \quad k - 1 \leq x \leq k + 1 \quad (31)$$

$$g(x) = (x - k)^2, \quad k - 1 \leq x \leq k + 1 \quad (32)$$

